ECOLE POLYTECHNIQUE — OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1987 — OPTION P'

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Dans tout le problème, $\mathcal{A}$ est l'algèbre sur le corps C des matrices carrées à 16 éléments complexes. On note I l'élément neutre de $\mathcal{A}$ pour la multiplication des matrices et, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, Tr(A) désigne la trace de A.

♦

I

1.a. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{A}$. Vérifier l'égalité Tr(AB) = Tr(BA).

b. Si A n'est pas la matrice nulle, comment peut-on choisir B pour que Tr(AB) ne soit pas nulle ?

2. On suppose que A et B vérifient les égalités $A^2 = B^2 = I$ et qu'elles *anticommutent*, c'est-à-dire qu'elles vérifient l'égalité AB = −BA.

a. En simplifiant de deux façons différentes Tr(BAB), montrer que la trace de A est nulle. Quelle est la valeur de Tr(B) ?

b. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? Quelles sont leurs valeurs propres et les ordres de multiplicité de ces valeurs propres ?

c. Calculer le carré de la matrice iAB et vérifier qu'elle anticommute avec A et B. Quelle est la valeur de Tr(AB) et quelles sont les valeurs propres de iAB ?

3. Soient α et β les endomorphismes de l'espace vectoriel C^4 respectivement représentés par les matrices A et B de la question I.2 pour une base de C^4. On note P_α l'ensemble des points de C^4 invariants par α, P_β l'ensemble des points de C^4 invariants par β ; Π_α est un autre sous-espace propre de α, de dimension maximale, et Π_β un autre sous-espace propre de β, de dimension maximale.

a. Quelles sont les dimensions de P_α, P_β, Π_α, Π_β ?

b. Donner une définition géométrique de α à l'aide de P_α et Π_α, et de β à l'aide de P_β et Π_β.

c. Quelles sont les intersections deux à deux des sous-espaces P_α, P_β, Π_α, Π_β ?

d. Quelle est l'image de P_β par α et celle de P_α par β ?

♦

II

1. Soient A_p ($p = 1, 2, 3, 4$) 4 matrices appartenant à $\mathcal{A}$, chacune de carré I, et qui anticommutent deux à deux.

a. On définit les 6 matrices A_r ($r = 5, ..., 10$) respectivement égales, dans l'ordre croissant des indices r, aux produits $iA_p A_{p'}$ pour les couples (p, p') successivement égaux à (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4). Quelles sont les traces et les valeurs propres des matrices A_j ($j = 1, ..., 10$) ?

b. On définit les 4 matrices A_s ($s = 11, ..., 14$) respectivement égales, dans l'ordre croissant des indices s, aux produits $iA_p A_{p'} A_{p''}$ pour les triplets (p, p', p'') successivement égaux à (2, 3, 4), (1, 3, 4), (1, 2, 4) et (1, 2, 3). Pour chaque indice $s = 11, ..., 14$, calculer A_s^2 et montrer qu'il existe un entier $q \in [1,4]$ tel que A_q anticommute avec A_s. Quelles sont les traces et les valeurs propres des matrices A_s ?

c. Quelle est la trace et quelles sont les valeurs propres de $A_{15} = A_1 A_2 A_3 A_4$?

2.a. Soient j et k deux entiers compris au sens large entre 1 et 15. Calculer la trace de $A_j A_k$.

b. En déduire que les 15 matrices A_j constituent, avec I, une base de $\mathcal{A}$ en tant qu'espace vectoriel sur C.

c. Quelles sont les matrices de $\mathcal{A}$ qui commutent avec les 4 matrices A_p ($p = 1, ..., 4$) ?

OPTION P' seule :

3. On considère les 4 matrices

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier qu'elles satisfont aux conditions imposées aux matrices A_p ($p = 1, ..., 4$) dans la question II.1.

Tournez la page S. V. P.

OPTION M' seule :

3. On considère les 4 matrices carrées à 4 éléments

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad m_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad m_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad m_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

et les 4 matrices H_p ($p = 1, ..., 4$) appartenant à $\mathcal{A}$ et définies par blocs de la façon suivante

$$H_1 = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & -m_1 \end{pmatrix} \quad H_p = \begin{pmatrix} 0 & m_p \\ m_p & 0 \end{pmatrix} \quad (p = 2, 3, 4)$$

où 0 représente le bloc carré de 4 éléments nuls. Vérifier que les 4 matrices H_1, H_2, H_3, H_4 satisfont aux conditions imposées aux matrices A_p dans la question II.1.

♦

III

Dans toute la suite du problème, on suppose données 4 matrices A_p ($p = 1, ..., 4$) vérifiant les hypothèses de II.1. ; on définit les matrices A_j ($j = 5, ..., 15$) comme dans II.1. et on pose $A_0 = I$.

1.a. Soit $L \in \mathcal{A}$ une matrice inversible. Les matrices $A'_p = L^{-1}A_pL$ ($p = 1, ..., 4$) vérifient-elles les hypothèses de II.1. ?

b. Comment peut-on choisir L pour que $A'_p = -A_p$ pour tout $p = 1, ..., 4$?

2. On suppose dans toute la suite de cette partie III que les B_p ($p = 1, ..., 4$) sont 4 matrices de $\mathcal{A}$ vérifiant les mêmes hypothèses que les matrices A_p et on définit les matrices B_j ($j = 5, ..., 15$) à partir de B_1, B_2, B_3, B_4 comme on l'a fait en II.1 pour les A_j à partir de A_1, A_2, A_3, A_4. On pose en outre $B_0 = I$.

a. Pour tout couple (h, k) d'entiers appartenant à $[0, 15]$, on note $\lambda_{h,k}$ la coordonnée non nulle de $A_h A_k$ dans la base (A_j) ($j = 0, ..., 15$) et $\lambda'_{h,k}$ la coordonnée non nulle de $B_h B_k$ dans la base (B_j) ($j = 0, ..., 15$). Comparer $\lambda'_{h,k}$ et $\lambda_{h,k}$ et calculer le produit $\lambda_{h,k}\lambda_{k,h}$.

OPTION P' seule :

b. Montrer que, quelle que soit la matrice $X \in \mathcal{A}$, la matrice

$$M = \sum_{k=0}^{15} A_k X B_k$$

vérifie, pour tout $h = 0, ..., 15$, l'égalité $A_h M B_h = M$.

c. Montrer que, parmi les 16 matrices $X \in \mathcal{A}$ constituées chacune d'un seul élément égal à 1, les 15 autres étant nuls, il en existe au moins une telle que la matrice M qui lui correspond soit non nulle.

d. Soient $Y \in \mathcal{A}$ et $N = \sum_{h=0}^{15} B_h Y A_h$. Montrer que MN commute avec toutes les matrices A_h. Calculer la trace de MN en fonction de celle de MY et en déduire qu'on peut trouver une matrice $X \in \mathcal{A}$ telle que M soit inversible et que $B_h = M^{-1}A_hM$ pour tout $h = 0, ..., 15$.

OPTION M' seule pour le reste du III :

b. On définit les endomorphismes ρ, σ et τ de l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ par

$$\rho(X) = \sum_{k=0}^{15} A_k X A_k \qquad \sigma(X) = \sum_{k=0}^{15} A_k X B_k \qquad \tau(X) = \sum_{k=0}^{15} B_k X A_k \quad .$$

Montrer que, pour tout indice $h = 0, ..., 15$ et tout $X \in \mathcal{A}$,

$$A_h\rho(X)A_h = \rho(X) \qquad A_h\sigma(X)B_h = \sigma(X) \qquad B_h\tau(X)A_h = \tau(X) \quad .$$

En déduire un polynôme du deuxième degré à coefficients réels annulé par ρ, σ et τ.

c. Avec quelles matrices de $\mathcal{A}$ les matrices appartenant à l'image de ρ et les matrices de la forme $\sigma(X)\tau(Y)$ (avec $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{A}$) commutent-elles ? Comparer à I les matrices $\rho(X)$ et $\sigma(X)\tau(Y)$.

d. Calculer la trace de $\rho(X)$ en fonction de celle de X.
Exprimer $\rho(X)$ à l'aide de Tr(X).
Quels sont l'image, le noyau, les valeurs propres de ρ et sa matrice pour la base de $\mathcal{A}$ constituée des A_j ($j = 0, ..., 15$) ?

e. Calculer la trace de $\sigma(X)\tau(Y)$ en fonction de celle de $\sigma(X)Y$ et en déduire que s'il existe des éléments non nuls dans l'image de σ, ce sont des matrices inversibles.

f. Pour la base constituée des A_j, exprimer la coordonnée d'indice j de $\sigma(X)$ à l'aide de la trace de $A_j\sigma(X)$ et déduire de ce qui précède la valeur numérique de la trace de l'endomorphisme σ de $\mathcal{A}$. Quels sont le rang et les valeurs propres de σ ?

Tournez la page S. V. P.

ECOLE POLYTECHNIQUE
Opt. M' et P'-Math
page 71
1987

Rappel : OPTION M' seule pour le reste du III :

3.a. Montrer que les matrices inversibles $M \in \mathcal{A}$ telles que $B_p = M^{-1}A_pM$ pour tout $p = 1, ..., 4$ sont les matrices non nulles appartenant à l'image de σ et qu'elles sont toutes proportionnelles à l'une quelconque d'entre elles, qu'on notera P.

b. Caractériser à l'aide de P les matrices appartenant au noyau de σ.

4.a. Exprimer à l'aide de certaines des matrices H_p ($p = 1, ..., 4$) définies à la question II.3 une matrice U de déterminant 1, qui commute avec H_1, H_2 et H_3, et qui anticommute avec H_4. En notant $\overline{A}$ la matrice imaginaire conjuguée de toute matrice $A \in \mathcal{A}$, en déduire l'égalité $\overline{H}_p = U^{-1}H_pU$ pour tout $p = 1, ..., 4$.

b. Soit $Q \in \mathcal{A}$ une matrice inversible telle que, pour tout $p = 1, ..., 4$, on ait $H_p = Q^{-1}A_pQ$. Exprimer à l'aide de Q et U une matrice V de déterminant de module 1 telle que, pour tout $p \in 1, ..., 4$, on ait $\overline{A}_p = V^{-1}A_pV$.

Calculer $V\overline{V}$.

c. On suppose enfin dans cette question que les 4 matrices A_p sont hermitiennes.
Comparer V à sa transposée et à l'inverse de son adjointe.
Montrer qu'on peut choisir Q unitaire.

♦

IV

1. On considère l'espace $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique et muni du produit scalaire euclidien usuel pour lequel cette base est orthonormale. Soit T la matrice, pour cette base, d'un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^4$; les éléments de T seront notés $t_{p,q}$ ($p = 1, ..., 4$; $q = 1, ..., 4$). Pour tout $p = 1, ..., 4$, on pose

$$C_p = \sum_{q=1}^{4} t_{p,q} A_q \quad .$$

a. Calculer C_p^2 et, pour $p \neq q$, $C_pC_q + C_qC_p$.

b. En déduire l'existence d'une matrice inversible $R \in \mathcal{A}$ telle que, pour tout $p = 1, ..., 4$, $C_p = R^{-1}A_pR$.

2. On considère un ouvert Ω de $\mathbb{R}^5$ et les équations

$$E_1 : \quad \sum_{p=1}^{4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_p^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_0^2}$$

et

$$E_2 : \quad \sum_{p=1}^{4} A_p \frac{\partial \Phi}{\partial x_p} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_0}$$

et on appelle solution de E_n ($n = 1$ ou 2) sur Ω toute fonction Φ à valeurs dans $\mathcal{A}$, indéfiniment dérivable sur Ω et vérifiant E_n ($n = 1$ ou 2) en tout point de Ω.

Montrer que toute solution de E_2 sur Ω est aussi une solution de E_1 sur Ω.

3. Soit T la matrice orthogonale envisagée en IV.1 et soit Θ l'automorphisme de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$ a pour coefficients $\theta_{0,0} = 1$, $\theta_{i,0} = \theta_{0,i} = 0$ si $i \neq 0$ et $\theta_{p,q} = t_{p,q}$ si $pq \neq 0$. Etablir que si Φ est une solution de E_2 sur Ω, $\Psi = R^{-1}(\Phi \circ \Theta)$ est une solution de E_2 sur l'ouvert $\Theta^{-1}(\Omega)$.

♦ ♦
♦

ECOLE POLYTECHNIQUE
Opt. M' et P'-Math 2
1987
page 72